Богачева Марина Николаевна
Bogacheva Marina Nikolaevna
Ростовский Государственный строительный университет
Rostov State construction university
Доцент кафедры Прикладной математики и вычислительной техники
Associate professor of Applied mathematics and computer facilities
E-Mail: marinabogacheva@mail.ru

Построение совершенных хеджей посредством приближения мартингальных мер

Creation of perfect hedges by means of approach of martingalny measures

Аннотация: Подробно рассмотрен пример построения совершенных хеджей посредством приближения мартингальных мер, мерами удовлетворяющими свойству универсальной хааровской единственности.

The Abstract: The example of creation of perfect hedges by means of approach of martingalny measures, measures satisfying to property of universal haarovsky uniqueness is in detail considered.

Ключевые слова: Мартингальные меры, полный рынок, безарбитражный рынок, свойство универсальной хааровской единственности.

Keywords: Martingale measure, full market, bezarbitrazhny market, property of universal haarovsky uniqueness.

***

Стохастическая финансовая математика изучает разнообразные модели финансовых рынков: полные и безарбитражные рынки, безарбитражные и неполные рынки, полные арбитражные финансовые рынки, и наконец, арбитражные неполные рынки. Основные результаты, которые имеют законченный вид, относятся, в основном, к полным безарбитражным рынкам [1,2]. Несмотря на многочисленные работы, посвященные расчетам на неполных безарбитражных рынках, тематика, связанная с неполными безарбитражными рынками, еще далеко не исчерпана. Неполные и безарбитражные рынки изучают, в основном, используя методы опционального хеджирования, квантильного хеджирования и хеджирования в среднеквадратичном.

Проблема подобного преобразования неполных безарбитражных рынков в безарбитражные и полные была впервые решена еще в 1987 году в работе М. Такку и В. Виллингера, где переход от неполных рынков к полным осуществлялся заменой исходной мартингальной меры неэквивалентной ей мартингальной мерой. Однако, с помощью полученной таким образом единственной мартингальной меры невозможно вычислять цены финансовых контрактов, справедливые для изначально рассматриваемого финансового рынка. Этот недостаток впервые был преодолен А.В. Мельниковым и К.М. Феоктистовым в 2001 г. В их работе пополнение финансового рынка проводилось посредством добавления к рисковым активам исходного рынка дополнительных активов, функционально зависимых с изначальными.

Для решения проблемы преобразования неполных безарбитражных рынков в полные

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

безарбитражные финансовые рынки в работе использован метод интерполяции финансовых рынков с помощью хааровских фильтраций (метод хааровских интерполяций финансовых рынков).

Существо этого метода состоит в следующем. Рассматривая безарбитражные, но неполные рынки мы расширяем исходную фильтрацию финансового рынка таким образом, что она превращается в хааровскую фильтрацию, в которой при переходе от момента времени n к моменту n+1 ровно один атом дробится на две части, а остальные атомы остаются неизменными. Затем, используя вероятностное решение задачи Дирихле для дисконтированной цены акции по отношению к хааровской фильтрации, мы получаем однозначно определенную интерполяцию дисконтированной цены акции на специальным образом выбранные промежуточные времена. Наконец, с помощью таким образом полученной мартингальной интерполяции, мы строим финансовый рынок, определенный как на исходных, так и на вновь введенных промежуточных значениях времени. На исходных значения времени цены акции и цены банковского счета этого рынка совпадают с изначально заданными, т.е. мы получаем интерполяцию исходного финансового рынка. Для полученного интерполирующего рынка мы строим хеджирующую стратегию.

Рассмотрим следующий пример. Пусть выполняются все условия леммы 1.4 [3], причём m=4. Не нарушая общности, будем считать, что $b_1 > a > b_2 > b_3 > b_4$. Положим $b_1 = 10, a = 8, b_2 = 6, b_3 = 4, b_4 = 2$. Из пункта 1) доказательства леммы 1.4 следует, что порождающий мартингальные меры многогранник P(Z,**F**) совпадает в данном случае с треугольником ABC без границы (рис. 1). Вершины треугольника ABC имеют следующие координаты: A($\frac{1}{2}$,0,0), B(0,$\frac{1}{3}$,0), C(0,0, $\frac{1}{4}$). Плоскость треугольника ABC удовлетворяет уравнению $2p_2 + 3p_3 + 4p_4 = 1$. Плоскость треугольника, проходящего через точки (c,0,0), (0,c,0) и (0,0,c) (где $c = \frac{b_1 - a}{b_2 - b_3}$), имеет вид $3p_2 + 3p_3 + 3p_4 = 1$.

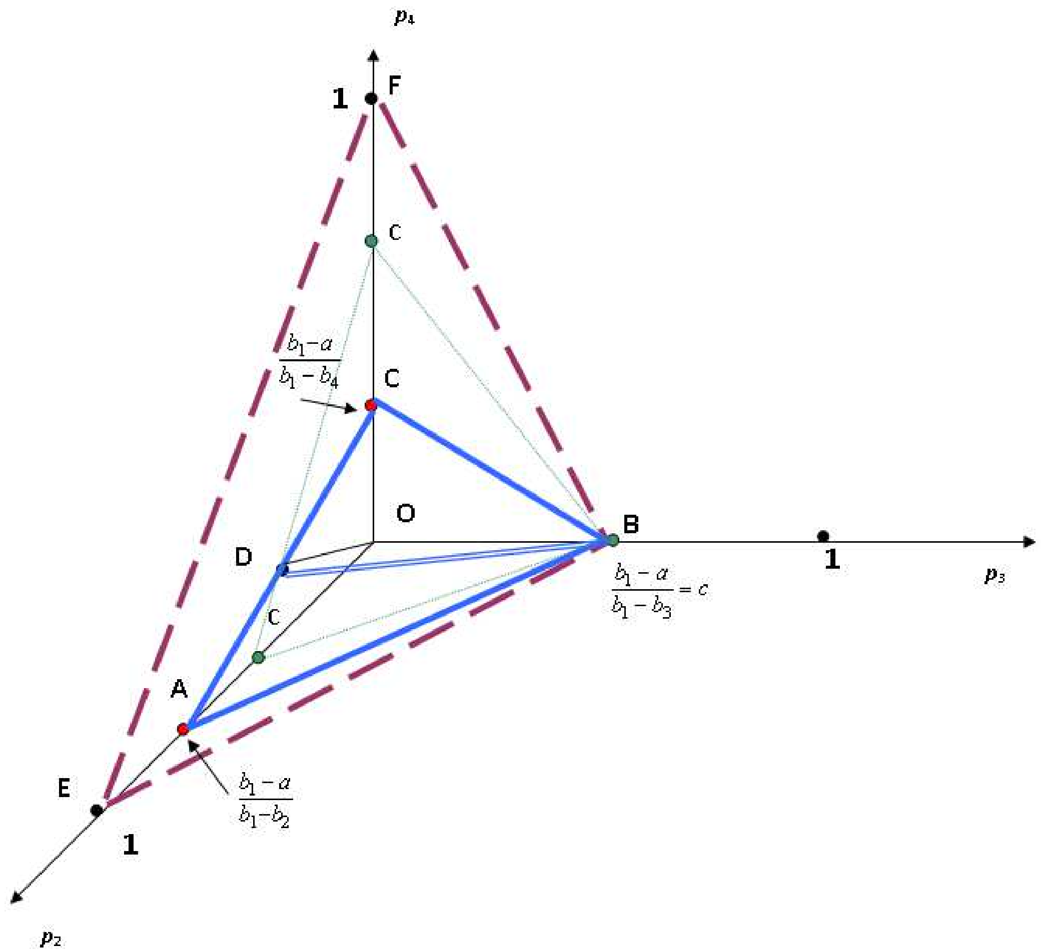

Рисунок 1.

Отрезок BD (без концов), представляет мартингальные меры, не удовлетворяющие свойству универсальной хааровской единственности, поэтому найдя уравнение BD, и взяв на нем произвольную точку $M(\frac{1}{12},\frac{1}{6},\frac{1}{12})$ получаем мартингальные меры $p_1=\frac{2}{3}, p_2=\frac{1}{12}, p_3=\frac{1}{6}, p_4=\frac{1}{12}$, не удовлетворяющие свойству универсальной хааровской единственности.

Рассмотрим одну из возможных интерполяций данного рынка (1,Z) рынком (1,Y) (рис. 2). Найдем точку на плоскости ABC, которая "близка" к точке M. Пусть точка M' имеет следующие координаты – M’($\frac{1}{12}+\delta,\frac{1}{6},\frac{1}{12}+\varepsilon$). Пользуясь уравнением плоскости ABC, получаем, что $\delta=-2\varepsilon$. Пусть $\varepsilon=\frac{1}{48}$.

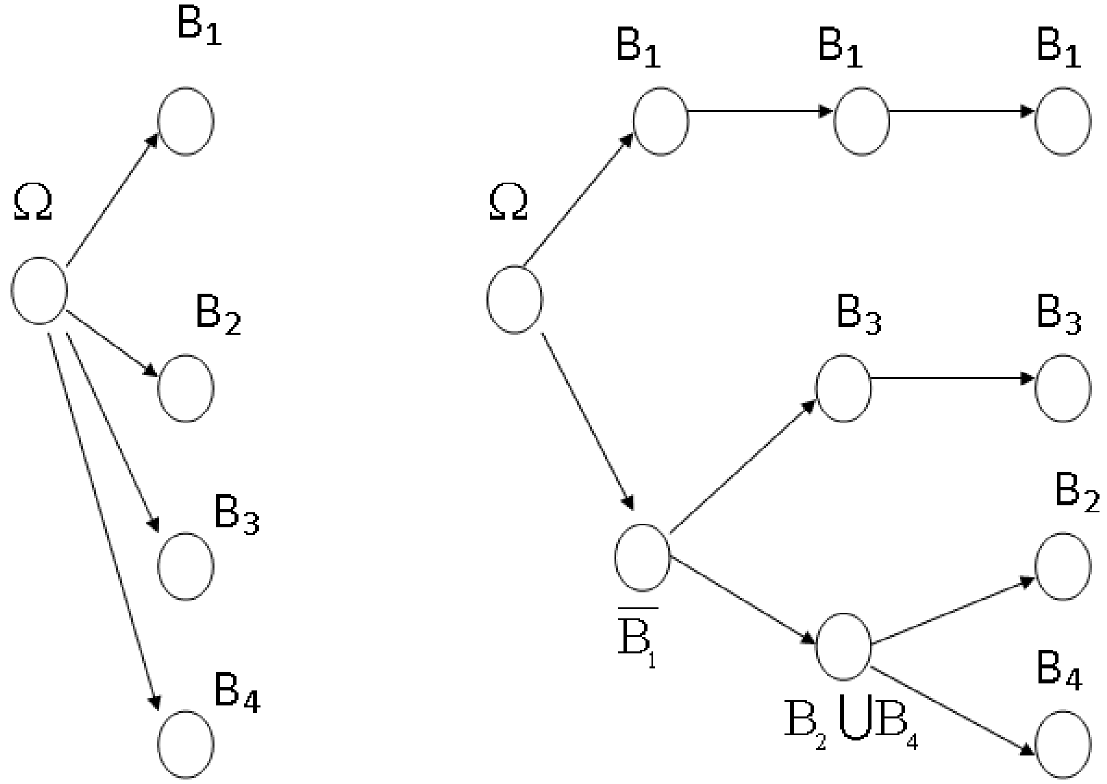

Рисунок 2.

Таким образом, получили точку M’($\frac{1}{24}, \frac{1}{6}, \frac{5}{48}$), т.е. нашли мартингальную меру P': $p'_1 = \frac{33}{48}, p'_2 = \frac{1}{24}, p'_3 = \frac{1}{6}, p'_4 = \frac{5}{48}$ удовлетворяющую свойству универсальной хааровской единственности.

Рассмотрим данную интерполяцию относительно мер P и P':

1. Для исходной меры P имеем:

$$Y_0 = 8, Y_1(B_1) = 10, Y_1(\overline{B_1}) = 4,$$

$$Y_2(B_1) = 10, Y\ (B_3) = 4, Y_2(B_2 \cup B_4) = 4,$$

$$Y_3(B_1) = 10, Y_3(B_3) = 4, Y_3(B_2) = 6, Y_4(B_4) = 2.$$

2. Для меры P', удовлетворяющей свойству универсальной хааровской единственности, получаем:

$$Y_0 = 8, Y_1(B_1) = 10, Y_1(\overline{B_1}) = \frac{18}{5},$$

$$Y_2(B_1) = 10, Y_2(B_3) = 4, Y_2(B_2 \cup B_4) = \frac{22}{7},$$

$$Y_3(B_1) = 10, Y_3(B_3) = 4, Y_3(B_2) = 6, Y_4(B_4) = 2.$$

Найдем общий вид реплицируемого финансового обязательства F_1 исходного (1, Z)-рынка. Пусть $F_1 = \sum_{i=1}^{4} f_i I_{B_i}$. Тогда

$$\begin{cases} \beta_1 + 10\gamma_1 = f_1 \\ \beta_1 + 6\gamma_1 = f_2 \\ \beta_1 + 4\gamma_1 = f_3 \\ \beta_1 + 2\gamma_1 = f_4 \end{cases}$$

Данная система разрешима тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f_1 = 4f_3 - 3f_4 \\ f_2 = 2f_3 - f_4 \end{cases}.$$

Можно найти общий вид реплицируемого финансового обязательства интерполирующего (1, Y)-рынка. Например, данное финансовое обязательство реплицируемо тогда и только тогда, когда $f_2 = 2f_3 - f_4$.

Рассмотрим финансовое обязательство, которое нельзя реплицировать в рынке, полученном мартингальной интерполяцией по мере P': $F_1 = (1,2,1,1)$. Ясно, что условие $f_2 = 2f_3 - f_4$ не выполняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов И.В., Красий Н.П. О безарбитражности и полноте обобщённой модели финансового рынка в случае скупки акций // Обозрение прикладной и промышленной математики. Москва, ТВП. 1999 г. Т.6. №1.

2. Мисюра В.В. Расчёт хеджирующих стратегий для опционов европейского типа в случае (B,S)-рынка относительно специальной хааровской фильтрации // Сборник научных трудов III Всероссийского симпозиума "Математическое моделирование и компьютерные технологии". Т.4. Кисловодск. 1999. с.62-64.

3. Богачева М.Н., Павлов И.В. О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств.науки, 2002 №3.