Гробер Олег Владимирович,
Grober Oleg Vladimirovich
Ростовский государственный строительный университет
Rostov State University
доцент кафедры «Прикладной математики и вычислительной техники»,
кандидат физико-математических наук
associate professor, applied mathematics and computer science, candidate of physical and mathematical sciences

Гробер Татьяна Александровна
Grober Tatiana Aleksandrovna
Ростовский государственный строительный университет
Rostov State University
доцент кафедры «Прикладной математики и вычислительной техники»,
кандидат физико-математических наук
associate professor, applied mathematics and computer science, candidate of physical and mathematical sciences
E-Mail: Grober71@mail.ru

Об одном свойстве чезаровских средних в пространствах функций, удовлетворяющих обобщенным интегральным условиям Гельдера

One property of the chezarovski medium in spaces of functions satisfying a generalized integral conditions Gelders

Аннотация: В статье рассматриваются локально выпуклые пространства, связанные с обобщенными интегральными условиями Гельдера. Изучен вопрос о сходимости чезаровских средних к породившей их функции в топологии соответствующих пространств.

The Abstract: This article discusses the locally convex space associated with generalized integral terms Gelders. Examine the convergence of chezarovski medium to which their functions in topology appropriate spaces.

Ключевые слова: Обобщенные условия Гельдера, модуль непрерывности, условия Зигмунда, проективный предел, чезаровские средние.

Keywords: Generalized conditions Gelders, continuity module, conditions of Sigmund, projective limit, chezarovski medium.

***

Пусть $\omega(t)$ - произвольный модуль непрерывности и пусть $f(x) \in L^p[-\pi;\pi]$, $1 \le p < \infty$. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу $L^p_\omega[-\pi;\pi]$, если $f(x)$ удовлетворяет на $[-\pi;\pi]$ обобщенному интегральному условию Гельдера:

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{|h|\le\delta}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x+h)-f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = O(\omega(\delta))$$

при $\delta \to 0$. Интегральной полунормой Гельдера функции $f(x)$ называется величина

$$\left|f\right|_{p,\omega} = \sup_{0<|h|\le\pi}\frac{\left\|f(x+h)-f(x)\right\|_p}{\omega(|h|)},$$

а интегральной нормой Гельдера – сумма

$$\left\|f\right\|_{p,\omega} = \left\|f\right\|_p + \left|f\right|_{p,\omega}.$$

Класс $L^p_\omega[-\pi;\pi]$, снабженный интегральной нормой Гельдера, является банаховым несепарабельным пространством.

Обозначим через $L^p_{\omega,0}[-\pi;\pi]$ - сепарабельное подпространство $L^p_\omega[-\pi;\pi]$ функций, удовлетворяющих на $[-\pi;\pi]$ обобщенному усиленному интегральному условию Гельдера:

$$\omega_p(\delta, f) = o(\omega(\delta)) \text{ при } \delta \to 0.$$

В дальнейшем нам понадобится налагать на модуль непрерывности различные ограничения. Если выполняется условие

$$t = o(\omega(t))$$

при $t \to 0$, то будем говорить, что $\omega(t)$ принадлежит классу Ф.

Кроме этого, мы будем использовать Условия Зигмунда, рассмотренные в [1]:

$$\text{(Z)} \quad \int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t}dt = O(\omega(\delta)), \quad \delta \to 0;$$

$$\text{(Z1)} \quad \int_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^2}dt = O\left(\frac{\omega(\delta)}{\delta}\right), \quad \delta \to 0.$$

Функцию $\omega \in \Phi$, удовлетворяющую условиям (Z) и (Z1), отнесем к классу Φ_*, следуя обозначениям статьи [2].

Для модулей непрерывности можно ввести отношение порядка. Будем говорить, что $\omega_1(t) \prec \omega_2(t)$ ($\omega_1(t)$ "меньше", чем $\omega_2(t)$), если $\omega_1(t) = o(\omega_2(t))$ при $t \to 0$. В качестве наиболее простого примера можно взять $\omega_1(t) = t^\beta$, $\omega_2(t) = t^\alpha$, $\beta > \alpha$.

Пространства, связанные с обобщенными усиленными условиями Гельдера рассматривались, например, в работах [3], [4], [5].

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

Пусть $\omega \in \Phi$. Обозначим через $L^p_{\to\omega}$ проективный предел семейства банаховых пространств функций, удовлетворяющих обобщенным интегральным условиям Гельдера:

$$L^p_{\to\omega} = \lim_{\varphi \succ \omega, \varphi \in \Phi_*} pr \quad L^p_{\varphi}[-\pi;\pi].$$

Пространство $L^p_{\to\omega}$ является полным локально выпуклым пространством.

Теорема 1. Пусть $\omega \in \Phi_*$. Справедливо следующее представление

$$L^p_{\to\omega} = \lim_{\varphi \succ \omega, \varphi \in \Phi_*} pr \quad L^p_{\varphi,0}[-\pi;\pi]$$

Рассмотрим вопрос о сходимости чезаровских средних к породившей

их функции в топологии пространства $L^p_{\to\omega}$

Теорема 2. Пусть $\omega \in \Phi$, $f \in L^p_{\omega,0}[-\pi;\pi]$, $1 \le p < \infty$. Тогда чезаровские средние функции f

$$\sigma_n^f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) K_n(t) dt,$$

где

$$K_n(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2,$$

Сходятся к этой функции по норме $\|\cdot\|_{p,\omega}$, то есть

$$\left\|f - \sigma_n^f\right\|_{p,\omega} \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство. Известно ([2], стр. 34), что если $f \in L^p$, то чезаровские средние σ_n^f сходятся к функции f по L^p- норме.

Покажем сходимость σ_n^f к f по интегральной полунорме Гельдера. Пусть

$$\gamma_n(x) = \sigma_n^f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x-t) - f(x)\big) K_n(t) dt.$$

Докажем, что

$$|\gamma_n(x)|_{p,\omega} = \sup_{|h|<\pi} \frac{1}{\omega(|h|)} \|\gamma_n(x+h) - \gamma_n(x)\|_p \to 0, \text{при } n \to \infty.$$

Зафиксируем произвольное $h\colon |h| < \pi$. Применяя обобщенное неравенство Минковского, получим

$$\frac{1}{\omega(|h|)} \|\gamma_n(x+h) - \gamma_n(x)\|_p \le$$

$$\leq \frac{1}{2\pi\omega(|h|)} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \|f(x+h-t) - f(x+h) - f(x-t) + f(x)\|_p dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi\omega(|h|)} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \big(\|f(x+h-t) - f(x-t)\|_p + \|f(x+h) - f(x)\|_p\big) dt.$$

Обозначим полученное неравенство (1). Пусть теперь $\varepsilon > 0$ задано. В зависимости от величины h, рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $|h| \leq \delta$. Тогда, ввиду принадлежности функции f пространству $L^p_{\omega,0}$, оба слагаемых в последней скобке правой части неравенства (1) не превышает $\varepsilon\omega(|h|)$. Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1,$$

получим

$$\frac{1}{\omega(|h|)} \|\gamma_n(x+h) - \gamma_n(x)\|_p \leq \varepsilon.$$

Случай 2. Пусть теперь $\delta < |h| < \pi$. Тогда имеем

$$\frac{1}{\omega(|h|)} \|\gamma_n(x+h) - \gamma_n(x)\|_p \leq$$

$$\leq \frac{1}{\omega(|h|)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega(|t|) K_n(t) \left(\frac{1}{\omega(|t|)} \|f(x+h-t) - f(x+h)\|_p \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\omega(|t|)} \|f(x+h-t) - f(x+h)\|_p \right) dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\omega(|h|)} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|\leq\delta} \omega(|t|) K_n(t) \left(\frac{1}{\omega(|t|)} \|f(x+h-t) - f(x+h)\|_p \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\omega(|t|)} \|f(x+h-t) - f(x+h)\|_p \right) dt +$$

$$+ \frac{1}{\omega(|h|)} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta<|t|\leq\pi} \omega(|t|) K_n(t) \left(\frac{1}{\omega(|t|)} \|f(x+h-t) - f(x+h)\|_p \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\omega(|t|)} \|f(x+h-t) - f(x+h)\|_p \right) dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\omega(|h|)} \left(2\varepsilon\omega(\pi) \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) dt + 2|f|_{p,\omega} \omega(\pi) \frac{1}{2\pi} \int_{\delta<|t|\leq\pi} K_n(t) dt \right).$$

Так как

$$\sup_{|t|\geq\delta} K_n(t) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то для достаточно больших n можно сделать

$$\sup_{|t|\geq\delta} K_n(t) < \varepsilon.$$

Учитывая также, что

$$\frac{1}{\omega(|h|)} < \frac{1}{\omega(\delta)}$$

и в случае $\delta < |h| < \pi$, получим

$$\frac{1}{\omega(|h|)} \|\gamma_n(x+h) - \gamma_n(x)\|_p \leq const \cdot \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\left\|f - \sigma_n^f\right\|_{p,\omega} \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $f \in L^p_{\to\omega}$, $\omega \epsilon \Phi_*$, $1 \leq p < \infty$. Тогда чезаровские средние функции f сходятся к этой функции в топологии пространства $L^p_{\to\omega}$.

Доказательство этой теоремы теперь легко следует из теорем 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н.К., Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. Мат. Общества. 1956. №5. с. 483-522.

2. Левшина Г.Д. Линейные функционалы над пространствами Липшица голоморфных функций в единичном круге // Математические заметки. 1983. Т. 33. №5. с. 679-688.

3. Гробер О.В. Базисы в пространствах функций, связанных с усиленным интегральным условием Гельдера // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. - 1998. - №1. - С. 11-16.

4. Бычков А.Б., Гробер В.М., Гробер О.В. Базисы в некоторых локально выпуклых пространствах, связанных с условиями Гельдера. // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Школа-конференция, посвященная 130-летию со дня рождения Д.Ф.Егорова. Тезисы докладов. – Казань, 1999, с. 51-52.

5. Гробер В.М., Гробер О.В. Базисы в некоторых ЛВП, связанных с ω-пространствами Гельдера // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. – 2003. - №1. - С. 3-5.