Гробер Олег Владимирович,
Grober Oleg Vladimirovich
Ростовский государственный строительный университет
Rostov State University
доцент кафедры «Прикладной математики и вычислительной техники»,
кандидат физико-математических наук
associate professor, applied mathematics and computer science, candidate of physical and mathematical sciences

Гробер Татьяна Александровна
Grober Tatiana Aleksandrovna
Ростовский государственный строительный университет
Rostov State University
доцент кафедры «Прикладной математики и вычислительной техники»,
кандидат физико-математических наук
associate professor, applied mathematics and computer science, candidate of physical and mathematical sciences
E-Mail: Grober71@mail.ru

О связи внутренних и граничных значений аналитических функций, связанных с усиленными интегральными условиями Гельдера

On the interior and boundary values of analytic functions in spaces, associated with enhanced integrated terms of Gelders

Аннотация: В статье изучаются граничные свойства некоторых локально выпуклых пространств, связанных с обобщенными интегральными условиями Гельдера. Получен ряд результатов для таких пространств, в частности, аналог классической теоремы Смирнова для пространств Харди.

The Abstract: The article explores the boundary properties of some locally convex spaces terms Gelders. A number of outcomes for such spaces, in particular theorems Smirnovs to Hardy spaces.

Ключевые слова: Обобщенные условия Гельдера, модуль непрерывности, условия Зигмунда, проективный предел, теорема Смирнова, пространства Харди.

Keywords: Generalized conditions Gelders, continuity module, conditions of Sigmund, projective limit, Smirnovs theorem, the Hardy spaces.

***

Пусть $\omega(t)$ - произвольный модуль непрерывности и пусть $f(x) \in L^p[-\pi;\pi]$, $1 \le p < \infty$. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу $L^p_\omega[-\pi;\pi]$, если $f(x)$ удовлетворяет на $[-\pi;\pi]$ обобщенному интегральному условию Гельдера:

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{|h|\le\delta}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x+h)-f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = O(\omega(\delta))$$

при $\delta \to 0$. Интегральной полунормой Гельдера функции $f(x)$ называется величина

$$|f|_{p,\omega} = \sup_{0<|h|\le\pi}\frac{\left\|f(x+h)-f(x)\right\|_p}{\omega(|h|)},$$

а интегральной нормой Гельдера – сумма

$$\|f\|_{p,\omega} = \|f\|_p + |f|_{p,\omega}.$$

Класс $L^p_\omega[-\pi;\pi]$, снабженный интегральной нормой Гельдера, является банаховым несепарабельным пространством.

Обозначим через $L^p_{\omega,0}[-\pi;\pi]$ - сепарабельное подпространство $L^p_\omega[-\pi;\pi]$ функций, удовлетворяющих на $[-\pi;\pi]$ обобщенному усиленному интегральному условию Гельдера:

$$\omega_p(\delta, f) = o(\omega(\delta)) \text{ при } \delta \to 0.$$

Через H^p_ω обозначим банахово несепарабельное пространство функций из H^p, $1 \le p < \infty$, для которых

$$\omega_p(\delta, f_r) = \sup_{|h|\le\delta}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(re^{i(\theta+h)}\right)-f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = O(\omega(\delta))$$

при $\delta \to 0$ равномерно по $0 < r < 1$.

Пусть далее, $H^p_{\omega,0}$ - сепарабельное подпространство H^p_ω функций, для которых

$$\omega_p(\delta, f_r) = o(\omega(\delta))$$

при $\delta \to 0$ равномерно по $0 < r < 1$.

В дальнейшем нам понадобится налагать на модуль непрерывности различные ограничения. Если выполняется условие

$$t = o(\omega(t))$$

при $t \to 0$, то будем говорить, что $\omega(t)$ принадлежит классу Ф.

Кроме этого, мы будем использовать Условия Зигмунда, рассмотренные в [1]:

(Z) $$\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt = O(\omega(\delta)), \quad \delta \to 0;$$

(Z1) $$\int_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^2} dt = O\left(\frac{\omega(\delta)}{\delta}\right), \quad \delta \to 0.$$

Функцию $\omega \in \Phi$, удовлетворяющую условиям (Z) и (Z1), отнесем к классу Φ_*, следуя обозначениям статьи [2].

Для модулей непрерывности можно ввести отношение порядка. Будем говорить, что $\omega_1(t) \prec \omega_2(t)$ ($\omega_1(t)$ "меньше", чем $\omega_2(t)$), если $\omega_1(t) = o(\omega_2(t))$ при $t \to 0$. В качестве наиболее простого примера можно взять $\omega_1(t) = t^\beta$, $\omega_2(t) = t^\alpha$, $\beta > \alpha$.

Пространства, связанные с обобщенными усиленными условиями Гельдера рассматривались, например, в работах [3], [4].

Пусть $\omega \in \Phi$. Обозначим через $L^p_{\to\omega}$ проективный предел семейства банаховых пространств функций, удовлетворяющих обобщенным интегральным условиям Гельдера:

$$L^p_{\to\omega} = \lim_{\varphi \succ \omega, \varphi \in \Phi_*} pr \quad L^p_\varphi[-\pi;\pi].$$

Пространство $L^p_{\to\omega}$ является полным локально выпуклым пространством.

Теорема 1. Пусть $\omega \in \Phi_*$. Справедливо следующее представление

$$L^p_{\to\omega} = \lim_{\varphi \succ \omega, \varphi \in \Phi_*} pr \quad L^p_{\varphi,0}[-\pi;\pi]$$

Введем в рассмотрение проективный предел семейства банаховых пространств аналитических функций:

$$H^p_{\to\omega} = \lim_{\varphi \succ \omega, \varphi \in \Phi_*} pr \quad H^p_{\varphi,0}.$$

Пространство $H^p_{\to\omega}$ является полным локально выпуклым пространством.

Получим теорему, являющуюся аналогом классической теоремы Смирнова для пространств Харди H^p ([5], с. 116).

Лемма 1. Пусть $f\left(re^{i\theta}\right)\in H^p_{\omega,0}$, $\omega\in\Phi$. Тогда $f\left(e^{i\theta}\right)\in L^p_{\omega,0}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Из принадлежности $f\left(re^{i\theta}\right)$ пространству $H^p_{\omega,0}$ следует существование такого $\eta(\varepsilon)$, что

$$\omega_p(\delta, f_r)<\frac{\varepsilon}{3}\omega(\delta),\ \forall\delta\in(0;\eta),\ \forall r\in(0;1). \tag{1}$$

Так как $f\left(re^{i\theta}\right)\in H^p$, то $f\left(e^{i\theta}\right)\in L^p$. Известно [6, с.454], что

$$\left\| f\left(re^{i\theta}\right)-f\left(e^{i\theta}\right)\right\|_p\to 0 \quad \text{при} \quad r\to 1.$$

Зафиксируем $\delta\in(0;\eta)$. Выберем r_0 : $\forall r\ge r_0$ выполняется

$$\left\| f\left(re^{i\theta}\right)-f\left(e^{i\theta}\right)\right\|_p\le\frac{\varepsilon}{3}\omega(\delta). \tag{2}$$

Тогда, с учетом (1) и (2), $\forall h$: $|h|<\delta$ и $\forall r\ge r_0$ имеем

$$\begin{aligned}\left\| f\left(e^{i(\theta+h)}\right)-f\left(e^{i\theta}\right)\right\|_p &\le \left\| f\left(e^{i(\theta+h)}\right)-f\left(re^{i(\theta+h)}\right)\right\|_p + \\ &+\left\| f\left(re^{i(\theta+h)}\right)-f\left(re^{i\theta}\right)\right\|_p+\left\| f\left(re^{i\theta}\right)-f\left(e^{i\theta}\right)\right\|_p\le \\ &\le\frac{\varepsilon}{3}\omega(\delta)+\frac{\varepsilon}{3}\omega(\delta)+\frac{\varepsilon}{3}\omega(\delta)=\varepsilon\omega(\delta).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega_p(\delta, f_r)=o(\omega(\delta))$$

при $\delta\to 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $f(z)$ - аналитическая функция в $|z|<1$. Тогда $\omega_p(\delta, f_r)$ есть неубывающая функция от r.

Доказательство. Будем использовать хорошо известную [7, с.434] теорему: если $\varphi(u)$ неубывающая и выпуклая функция на $(-\infty;\infty)$ и $F(z)$ регулярна при $|z|<1$, то интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\left(\ln\left|F(re^{ix})\right|\right)dx$$

есть неубывающая функция от r .

При любом фиксированном h функция $f_h(z) = f(re^{i\theta} \cdot e^{ih})$ является аналитической в $|z| < 1$. Тогда аналитической является и функция $f_h(z) - f(z)$. Взяв теперь $\varphi(u) = e^{pu}$, получим, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{p\ln|f_h(z)-f(z)|}d\theta$$

представляет собой неубывающую функцию от r , т.е. неубывающей функцией от r является

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i(\theta+h)}) - f(re^{i\theta})\right|^p d\theta$$

для любого h . Ясно, что неубывающей от r при любом фиксированном h будет также функция

$$\psi_h(r) = \left\| f\left(re^{i(\theta+h)}\right) - f\left(re^{i\theta}\right)\right\|_p .$$

Рассмотрим семейство функций $\{\psi_h(r)\}$, где $h \in (-\delta; \delta)$ и функцию $\psi(r) = \sup\limits_{|h|<\delta} \psi_h(r)$, которая и есть, по существу $\omega_p(\delta, f_r)$.

Допустим противное, т.е. что $\psi(r)$ не является неубывающей. Тогда найдутся r_1 и r_2 такие, что $r_1 < r_2$, а $\psi(r_1) > \psi(r_2)$, т.е. $\eta = \psi(r_1) - \psi(r_2) > 0$. Тогда, по определению супремума, существует h_0 такое, что

$$\psi_{h_0}(r_1) > \psi(r_1) - \frac{\eta}{2} \text{ и } \psi_{h_0}(r_2) \le \psi(r_2) .$$

Имеем далее

$$\psi_{h_0}(r_1) - \psi_{h_0}(r_2) > \psi(r_1) - \frac{\eta}{2} - \psi(r_2) \ge \frac{\eta}{2} .$$

Итак,

$$\psi_{h_0}(r_1) > \psi_{h_0}(r_2) + \frac{\eta}{2} .$$

Это противоречит тому, что ψ_{h_0} неубывающая функция по r . Таким образом, $\omega_p(\delta, f_r)$ не убывает по r . Лемма доказана.

Теорема 2. Предположим, что $f(z)\in H^1$, а $f\left(e^{i\theta}\right)\in L^p_{\omega,0}$, $\omega\in\Phi$, $1\le p<\infty$. Тогда $f(z)\in H^p_{\omega,0}$.

Доказательство. Так как $f(z)\in H^1$, а $f\left(e^{i\theta}\right)\in L^p_{\omega,0}$, то по классической теореме Смирнова $f(z)\in H^p$, $1\le p<\infty$.

Пусть теперь $\varepsilon>0$ задано. Из принадлежности $f\left(e^{i\theta}\right)$ пространству $L^p_{\omega,0}$ следует существование $\eta>0$ такого, что

$$\omega_p(\delta, f_r)<\frac{\varepsilon}{3}\omega(\delta),\ \forall\delta\in(0;\eta). \tag{3}$$

Зафиксируем произвольное $\delta\in(0;\eta)$. Из теоремы Рисса находим r_0:

$$\left\| f\left(re^{i\theta}\right)- f\left(e^{i\theta}\right)\right\|_p\le\frac{\varepsilon}{3}\omega(\delta),\quad \forall r\in(r_0;1). \tag{4}$$

С учетом (3) и (4) $\forall h\in(-\delta;\delta)$ и $\forall r\in(r_0;1)$ имеем

$$\left\| f(re^{i(\theta+h)})-f(re^{i\theta})\right\|_p\le\left\| f(re^{i(\theta+h)})-f(e^{i(\theta+h)})\right\|_p+$$
$$+\omega_p(\delta, f)+\left\| f(re^{i\theta})-f(e^{i\theta})\right\|_p\le\varepsilon\omega(\delta).$$

Таким образом,

$$\omega_p(\delta, f_r)=o(\omega(\delta))$$

при $\delta\to 0$, $\forall r\in(r_0;1)$. Равномерность этой оценки для всех $\forall r\in(0;1)$ следует из леммы 2. Теорема доказана.

Приведем теперь аналогичное утверждение для пространств, являющихся проективными пределами пространств, рассмотренных выше.

Теорема 3. Пусть $f(z)\in H^1$, $f(e^{i\theta})\in L^p_{\to\omega}$, $\omega\in\Phi_*$, $1\le p<\infty$. Тогда $f(z)\in H^p_{\to\omega}$.

Доказательство теоремы теперь легко следует из теорем 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н.К., Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. Мат. Общества. 1956. №5. с. 483-522.

2. Левшина Г.Д. Линейные функционалы над пространствами Липшица голоморфных функций в единичном круге // Математические заметки. 1983. Т. 33. №5. с. 679-688.

3. Гробер О.В. Базисы в пространствах функций, связанных с усиленным интегральным условием Гельдера // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. - 1998. - №1. - С. 11-16.

4. Бычков А.Б., Гробер В.М., Гробер О.В. Базисы в некоторых локально выпуклых пространствах, связанных с условиями Гельдера. // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Школа-конференция, посвященная 130-летию со дня рождения Д.Ф.Егорова. Тезисы докладов. – Казань, 1999, с. 51-52.

5. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций // Государственное из-во технико-теоретической лит-ры. М., 1950.

6. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. – М., Наука, 1984.

7. Зигмунд А. Тригонометрические ряды I. – М., Мир, 1965.