Замятин Александр Витальевич
Zamyatin Alexander
Доцент кафедры «Начертательной геометрии и черчение».
Associate professor of the chair of “Descriptive geometry and sketching”.
E-Mail: alex080262@mail.ru

Сухомлинова Виктория Викторовна
Suhomlinova Victoria
Ростовский государственный строительный университет.
Rostov State Building University.
Ассистент кафедры «Начертательной геометрии и черчение».
Head Assistant of the chair of “Descriptive geometry and sketching”.
E-Mail: kng@rgsu.donpac.ru

Алгоритм расчёта вторых отражений на основе геометрической модели.

Algorithm of calculation of the second reflexions on the basis of geometrical model.

Аннотация: Рассмотрен алгоритм построения вторых отражений от экранов сложной формы на основе геометрической модели, при заданных источнике и приемнике излучения. Приведены аналитические зависимости, описывающий данный процесс, программные алгоритмы и примеры вычислений.

The Abstract: The algorithm of construction of the second reflexions from screens of the difficult form on the basis of geometrical model is considered, at the set source and the radiation receiver. The analytical dependences, the describing given process, program algorithms and examples of calculations are resulted.

Ключевые слова: Геометрическое моделирование, геометрическая оптика, геометрическая акустика, вторые отражения, законы отражения.

Keywords: Geometrical modelling, geometrical optics, the geometrical acoustics, the second reflexions, reflexion laws.

***

Вторые отражения оказывают заметное влияние на общую картину распространения различных видов излучения. В статье рассмотрен алгоритм построения вторых отражателей на основе геометрической модели. Для применения данного алгоритма на практике необходимо выполнение определённых условий, позволяющих пренебречь волновыми свойствами излучений. В этом случае геометрическая модель дает хорошие результаты в задачах геометрической оптики, геометрической акустики и др.

Пусть задана точка I, радиусом-вектором $\vec{R}_I$, в которой находится источник излучения, два экран – поверхность Σ, ее уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}_A(s,t) \tag{1}$$

и второй экран – поверхность Ω

$$\vec{r} = \vec{r}_B(u,v) \tag{2}$$

и задана точка *P*, радиусом-вектором $\vec{R}_P$, в которой находится приемник (рис. 1). Необходимо найти лучи, исходящие из точки , отразившиеся от экрана Σ, затем от экрана Ω и попавшие в точку *P*. Будем считать, что поверхности Σ и Ω не имеют, в рассматриваемых отсеках, особых точек и в каждой их точке существуют первые и вторые производные.

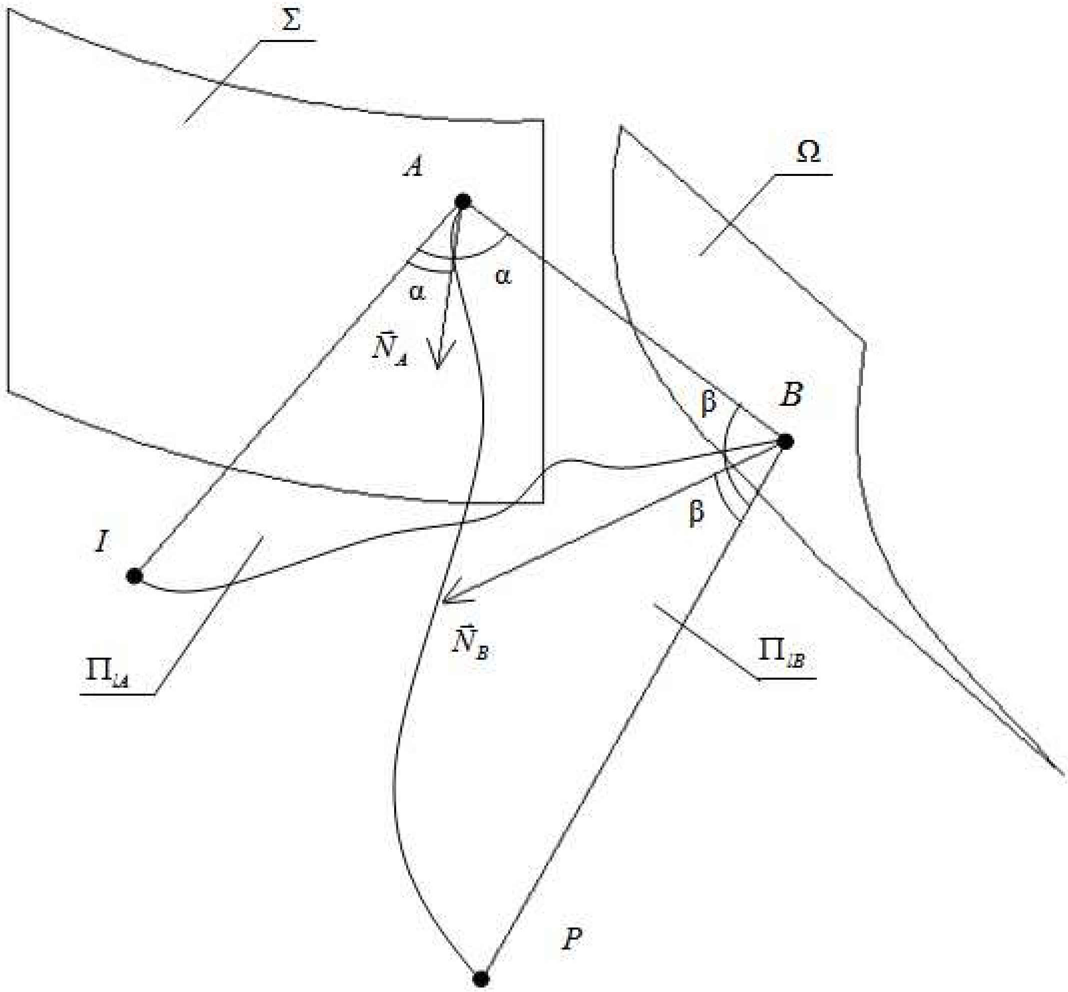

Рис. 1. *Вычисление вторых отражений*

Пусть луч из точки *I* попадает в точку *A* поверхности Σ (1), отражается и попадает в точку *B* поверхности Ω (2), отразившись от которой попадает в точку *P*. Задача состоит в том, чтобы найти точку *A*, т.е. параметры s_A и t_A уравнения (1) ей соответствующие и точку *B* – параметры u_B и v_B уравнения (2), которые ей соответствуют.

Уравнения нормалей к экранам в точках падения имеют вид

$$\vec{N}_A = \left[\frac{\partial \vec{r}_A(s_A,t_A)}{\partial s}, \frac{\partial \vec{r}_A(s_A,t_A)}{\partial t}\right]; \tag{3}$$

$$\vec{N}_B = \left[\frac{\partial \vec{r}_B(u_B,v_B)}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}_B(u_B,v_B)}{\partial v}\right]. \tag{4}$$

Вектор $\overrightarrow{AI}$ определяет луч, падающий от источника на экран Σ, он равен

$$\overrightarrow{AI} = \vec{R}_I - \vec{r}_A(s_A, t_A). \tag{5}$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$ определяет луч, отраженный от экрана Σ и падающий на экран Ω

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B(u_B, v_B) - \vec{r}_A(s_A, t_A). \tag{6}$$

Вектор $\overrightarrow{BP}$ определяет луч, отраженный от экрана Ω и попавший в точку P

$$\overrightarrow{BP} = \vec{R}_P - \vec{r}_B(u_B, v_B). \tag{7}$$

Косинус угла между векторами $\vec{N}_A$ и $\overrightarrow{AI}$ равен

$$\cos\angle\vec{N}_A, \overrightarrow{AI} = \frac{\left(\vec{N}_A, \overrightarrow{AI}\right)}{\left|\vec{N}_A\right|\left|\overrightarrow{AI}\right|}. \tag{8}$$

Косинус угла между векторами $\vec{N}_A$ и $\overrightarrow{AB}$ равен

$$\cos\angle\vec{N}_A, \overrightarrow{AB} = \frac{\left(\vec{N}_A, \overrightarrow{AB}\right)}{\left|\vec{N}_A\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|}. \tag{9}$$

Согласно закону отражения [1] $\angle\vec{N}_A, \overrightarrow{AI} = \angle\vec{N}_A, \overrightarrow{AB}$, следовательно $\cos\angle\vec{N}_A, \overrightarrow{AI} = \cos\angle\vec{N}_A, \overrightarrow{AB}$. Приравняв (8) и (9) и преобразовав, с учётом того, что все векторы, входящие в эти уравнения ненулевые, получаем

$$\left(\vec{N}_A, \overrightarrow{AB}\right)\left|\overrightarrow{AI}\right| - \left(\vec{N}_A, \overrightarrow{AI}\right)\left|\overrightarrow{AB}\right| = 0. \tag{10}$$

Также, согласно закону отражения [1] векторы $\overrightarrow{AI}$, $\vec{N}_A$ и $\overrightarrow{AB}$ лежат в одной лучевой плоскости Π_{lA} (рис. 1).

Вектор нормали лучевой плоскости Π_{lA} равен

$$\vec{N}_{lA} = \left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}\right] \tag{11}$$

Так как вектор $\vec{N}_A$ принадлежит плоскости Π_{lA}, то

$$\left(\vec{N}_A, \vec{N}_{lA}\right) = 0. \tag{12}$$

Косинус угла между векторами $\vec{N}_B$ и $\overrightarrow{BA}$ равен

$$\cos\angle\vec{N}_B, \overrightarrow{BA} = \frac{\left(\vec{N}_B, \overrightarrow{BA}\right)}{\left|\vec{N}_B\right|\left|\overrightarrow{BA}\right|}, \tag{13}$$

где $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \vec{r}_A(s_A, t_A) - \vec{r}_B(u_B, v_B)$.

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^00 – до 18^00)
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

Косинус угла между векторами $\vec{N}_B$ и $\overrightarrow{BP}$ равен

$$\cos\angle\vec{N}_B,\overrightarrow{BP}=\frac{\left(\vec{N}_B,\overrightarrow{BP}\right)}{\left|\vec{N}_B\right|\left|\overrightarrow{BP}\right|}. \tag{14}$$

Приравняв (13) и (14) и преобразовав, получим

$$\left(\vec{N}_B,\overrightarrow{BP}\right)\left|\overrightarrow{BA}\right|-\left(\vec{N}_B,\overrightarrow{BA}\right)\left|\overrightarrow{BP}\right|=0. \tag{15}$$

Векторы $\overrightarrow{BA}$, $\vec{N}_B$ и $\overrightarrow{BP}$ лежат в одной лучевой плоскости Π_{lB}. Вектор нормали этой лучевой плоскости равен

$$\vec{N}_{lB}=\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BP}\right], \tag{16}$$

из условия принадлежности $\vec{N}_B$ к плоскости Π_{lB}, имеем

$$\left(\vec{N}_B,\vec{N}_{lB}\right)=0. \tag{17}$$

Для определения параметров s_A и t_A, точки падения *A* на экран Σ и параметров u_B и v_B, точки падения *B* на экран Ω, имеем четыре уравнения (10), (12), (15) и (17). Запишем эти уравнения в виде системы

$$\begin{cases}\left(\vec{N}_A,\overrightarrow{AB}\right)\left|\overrightarrow{AI}\right|-\left(\vec{N}_A,\overrightarrow{AI}\right)\left|\overrightarrow{AB}\right|=0;\\ \left(\vec{N}_A,\vec{N}_{lA}\right)=0;\\ \left(\vec{N}_B,\overrightarrow{BP}\right)\left|\overrightarrow{BA}\right|-\left(\vec{N}_B,\overrightarrow{BA}\right)\left|\overrightarrow{BP}\right|=0;\\ \left(\vec{N}_B,\vec{N}_{lB}\right)=0.\end{cases} \tag{18}$$

Решим систему (18) методом Ньютона [2]. Обозначим

$$f_1=\left(\vec{N}_A,\overrightarrow{AB}\right)\left|\overrightarrow{AI}\right|-\left(\vec{N}_A,\overrightarrow{AI}\right)\left|\overrightarrow{AB}\right|; \tag{19}$$

$$f_2=\left(\vec{N}_A,\vec{N}_{lA}\right); \tag{20}$$

$$f_3=\left(\vec{N}_B,\overrightarrow{BP}\right)\left|\overrightarrow{BA}\right|-\left(\vec{N}_B,\overrightarrow{BA}\right)\left|\overrightarrow{BP}\right|; \tag{21}$$

$$f_4=\left(\vec{N}_B,\vec{N}_{lB}\right). \tag{22}$$

Продифференцируем уравнения (19) – (22) по параметрам *s*, *t*, *u* и *v*.

Возьмем s_i, t_i, u_i и v_i в качестве некоторого приближения искомых параметров, для нахождения приращения параметров Δs_i, Δt_i, Δu_i и Δv_i, на *i*-м шаге итерации, решаем следующую систему линейных уравнений

$$\begin{cases}\frac{\partial f_1}{\partial s}\Delta s_i+\frac{\partial f_1}{\partial t}\Delta t_i+\frac{\partial f_1}{\partial u}\Delta u_i+\frac{\partial f_1}{\partial v}\Delta v_i=-f_1;\\ \frac{\partial f_2}{\partial s}\Delta s_i+\frac{\partial f_2}{\partial t}\Delta t_i+\frac{\partial f_2}{\partial u}\Delta u_i+\frac{\partial f_2}{\partial v}\Delta v_i=-f_2;\\ \frac{\partial f_3}{\partial s}\Delta s_i+\frac{\partial f_3}{\partial t}\Delta t_i+\frac{\partial f_3}{\partial u}\Delta u_i+\frac{\partial f_3}{\partial v}\Delta v_i=-f_3;\\ \frac{\partial f_4}{\partial s}\Delta s_i+\frac{\partial f_4}{\partial t}\Delta t_i+\frac{\partial f_4}{\partial u}\Delta u_i+\frac{\partial f_4}{\partial v}\Delta v_i=-f_4.\end{cases} \qquad (23)$$

Значения функций и их производных в системе (23) вычисляются при параметрах равных s_i, t_i, u_i, v_i. Следующее приближение параметров вычисляется по формулам

$$s_{i+1}=s_i+\Delta s_i;\; t_{i+1}=t_i+\Delta t_i;$$
$$u_{i+1}=u_i+\Delta u_i;\; v_{i+1}=v_i+\Delta v_i.$$

Процесс вычисления продолжается до тех пор, пока максимальное абсолютное значение приращенй больше заданной положительной величины ε.

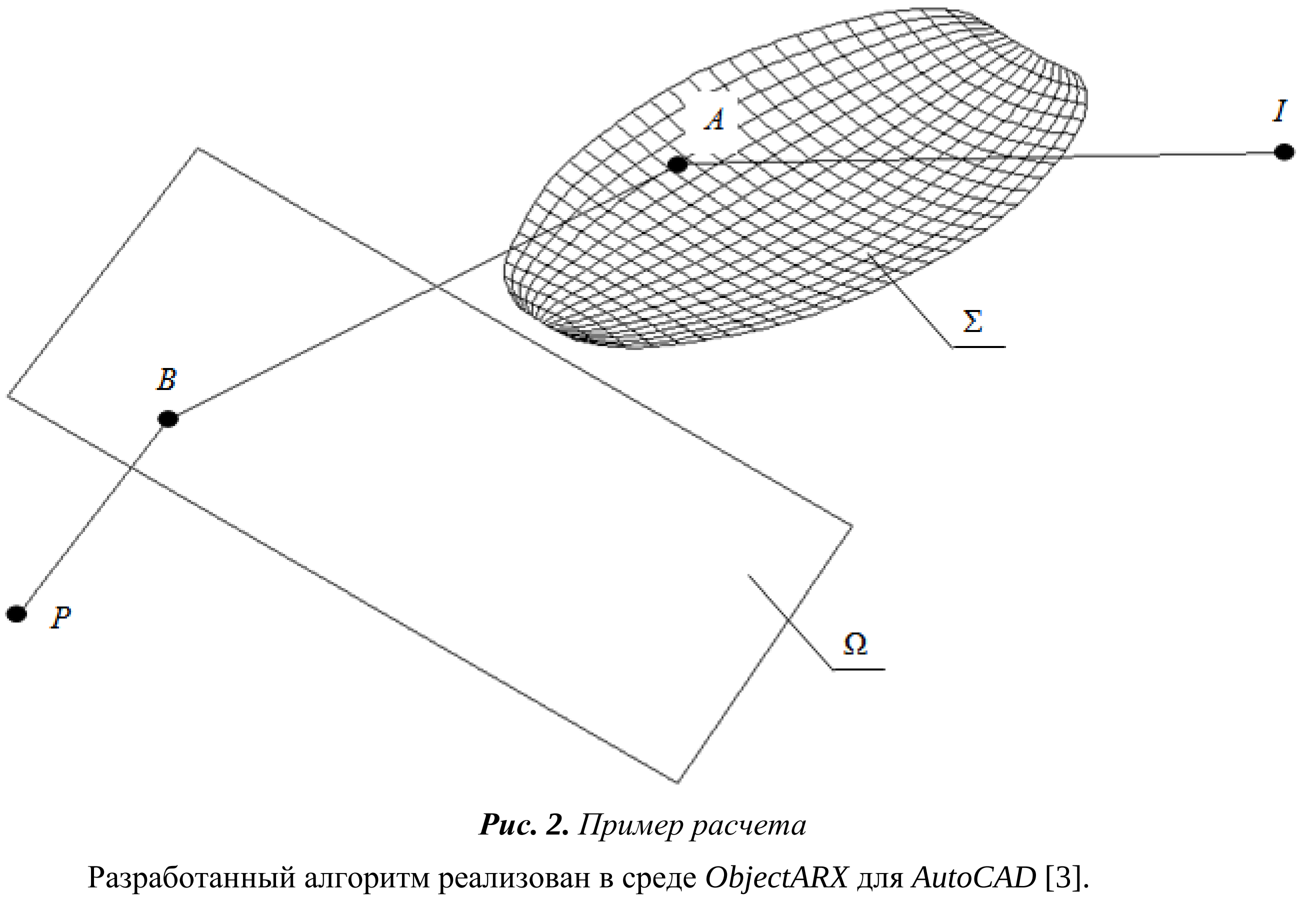

Рис. 2. *Пример расчета*

Разработанный алгоритм реализован в среде *ObjectARX* для *AutoCAD* [3].

Пример расчета приведен на рис. 2. Отражающая поверхность Σ аппроксимировались по методу Фергюсона [4], в качестве второй отражающей поверхности Ω взята плоскость. Для плоскости уравнение (2) имеет вид [5]

$$\vec{r}_B(u,v)=\vec{R}_0+u\vec{a}+v\vec{b},$$

где $\vec{R}_0$ – радиус-вектор любой точки плоскости, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ любые два неколлинеарных вектора заданной плоскости.

Описанный выше алгоритм может быть использован для расчета параметров вторичных отражений в задачах геометрической акустик, геометрической оптике и др. Разработанное программное обеспечение может использоваться самостоятельно или являться частью более сложных программных продуктов (САПР, АРМ и т.д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландсберг Г.С. Оптика / Г.С. Ландсберг. – Москва: Наука, 2003. – 848 с.
2. Волков Е.А. Численные методы / Е.А. Волков. – Москва: Наука, 1987. – 247 с.
3. Полищук Н.Н. AutoCAD: разработка приложений, настройка и адаптация / Н.Н. Полищук. – Санкт-Петербург: БХВ – Петербург, 2006. – 992 с.
4. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – Москва: Мир, 2001. – 604 с.
5. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии / П.С. Александров. – Москва: Наука, 1968. – 912 с.