Замятин Александр Витальевич
Zamyatin Alexander
Доцент кафедры «Начертательной геометрии и черчение».
Associate professor of the chair of “Descriptive geometry and sketching”.
E-Mail: alex080262@mail.ru

Сухомлинова Виктория Викторовна
Suhomlinova Victoria
Ростовский государственный строительный университет.
Rostov State Building University.
Ассистент кафедры «Начертательной геометрии и черчение».
Head Assistant of the chair of “Descriptive geometry and sketching”.
E-Mail: kng@rgsu.donpac.ru

Алгоритм расчёта первых отражений на основе геометрической модели

Algorithm of calculation of the first reflexions on the basis of geometrical model

Аннотация: Рассмотрен алгоритм построения первых отражений от экранов сложной формы на основе геометрической модели, при заданных источнике и приемнике излучения. Приведены аналитические зависимости, описывающий данный процесс, программные алгоритмы и примеры вычислений.

The Abstract: The algorithm of construction of the first reflexions from screens of the difficult form on the basis of geometrical model is considered, at the set source and the radiation receiver. The analytical dependences, the describing given process, program algorithms and examples of calculations are resulted.

Ключевые слова: Геометрическое моделирование, геометрическая оптика, геометрическая акустика, первые отражения, законы отражения.

Keywords: Geometrical modelling, geometrical optics, the geometrical acoustics, the first reflexions, reflexion laws.

***

В практических задачах, связанных с расчётами оптических, акустических и др. параметров, в тех случаях, когда можно пренебречь волновыми свойствами излучения, удобно использовать геометрическую модель [1].

Наибольшее влияние на картину распространения излучения оказывают прямые лучи, приходящие непосредственно от источника к приемнику и первые отражения. В статье рассмотрен алгоритм расчёта первых отраженных лучей от заданного экрана, если известно положение источника и приёмника излучения.

Пусть задан экран, в виде поверхности Σ в виде векторного уравнения:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \tag{1}$$

Будем считать, что поверхность экрана в пределах рассматриваемого отсека не имеет особых точек и в каждой точке существуют $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}$ и $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}$.

Известно положение источника излучения – точка *I* и приёмника – точка *P*. Необходимо построить лучи, исходящие из точки *I*, отражающиеся от экрана Σ и попадающие в точку *P*, если эти лучи существуют.

Будем считать, что волновыми свойствами излучения можно пренебречь, поэтому используем геометрическую модель.

Как известно [1], падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности в точке падения и составляют с ней равные углы. Обозначим точку падения через *A*, параметры поверхности, соответствующие точке *A* – u_A, v_A, плоскость, в которой лежат падающий, отражённый лучи и нормаль будем называть лучевой плоскостью и обозначим её через $\prod_l$ (рис.1).

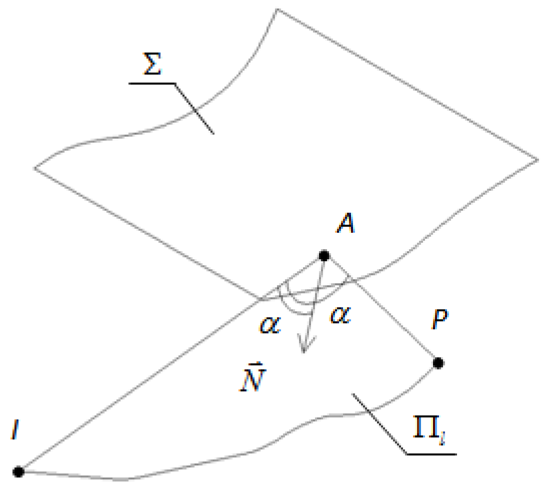

Рис. 1. *Геометрическая модель отражения*

Учитывая (1), нормаль в точке *A* поверхности Σ можно рассчитать по формуле

$$\vec{N} = \left[\frac{\partial \vec{r}(u_A, v_A)}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}(u_A, v_A)}{\partial v} \right], \tag{2}$$

квадратные скобки обозначают векторное произведение.

Вектор, началом которого является точка *A*, концом – точка *I*, определяет падающий луч. Он равен

$$\overrightarrow{AI} = \vec{R}_I - \vec{r}(u_A, v_A), \tag{3}$$

где $\vec{R}_I$ радиус-вектор точки *I*.

Вектор $\overrightarrow{AP}$ определяет отражённый луч:

$$\overrightarrow{AP} = \vec{R}_p - \vec{r}(u_A, v_A), \tag{4}$$

где $\vec{R}_P$ радиус-вектор точки *P*.

Косинус угла между векторами $\overrightarrow{AI}$ и $\vec{N}$ определяется выражением

$$\cos\angle\vec{N},\overrightarrow{AI}=\frac{\left(\vec{N},\overrightarrow{AI}\right)}{\left|\vec{N}\right|\left|\overrightarrow{AI}\right|},\qquad(5)$$

круглые скобки обозначают скалярное произведение векторов, прямые скобки обозначают длину (норму) вектора.

Косинус угла между векторами $\vec{N}$ и $\overrightarrow{AP}$ равен:

$$\cos\angle\vec{N},\overrightarrow{AP}=\frac{\left(\vec{N},\overrightarrow{AP}\right)}{\left|\vec{N}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AP}\right|}.\qquad(6)$$

Согласно закону отражения, углы между векторами $\angle\vec{N},\overrightarrow{AI}$ и векторами $\angle\vec{N},\overrightarrow{AP}$ должны быть равными, следовательно, равны и косинусы (5) и (6) этих углов

$$\frac{\left(\vec{N},\overrightarrow{AI}\right)}{\left|\vec{N}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AI}\right|}=\frac{\left(\vec{N},\overrightarrow{AP}\right)}{\left|\vec{N}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AP}\right|}\ .\qquad(7)$$

Учитывая, что ни один из векторов в (7) не является нулевым, имеем

$$\left(\vec{N},\overrightarrow{AI}\right)\cdot\left|\overrightarrow{AP}\right|-\left(\vec{N},\overrightarrow{AP}\right)\cdot\left|\overrightarrow{AI}\right|=0\,.\qquad(8)$$

Кроме условия (8), обусловленного равенством углов падающего и отраженного лучей с нормалью, известно [1], что векторы $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AP}$ и $\vec{N}$ лежат в одной лучевой плоскости $\prod_l$. Вектор нормали плоскости $\prod_l$ равен

$$\vec{N}_l=\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AI}\right].\qquad(9)$$

Угол между векторами $\vec{N}$ и $\vec{N}_l$ равен $90°$, следовательно

$$\left(\vec{N},\vec{N}_l\right)=0\qquad(10)$$

Для определения падающего и отраженного лучей необходимо определить точку падения A на поверхности, т.е., учитывая (1) параметры u_A и v_A, которые ей соответствуют. Чтобы определить u_A и v_A, соответствующие точке A поверхности Σ, решим систему, состоящую из уравнений (8) и (10)

$$\begin{cases}\left(\vec{N},\overrightarrow{AI}\right)\cdot\left|\overrightarrow{AP}\right|-\left(\vec{N},\overrightarrow{AP}\right)\cdot\left|\overrightarrow{AI}\right|=0;\\ \left(\vec{N},\vec{N}_l\right)=0.\end{cases}\qquad(11)$$

Для решения системы (11) применим численный метод Ньютона [2]. Обозначим

$$f_1(u,v)=\left(\vec{N},\overrightarrow{AI}\right)\cdot\left|\overrightarrow{AP}\right|-\left(\vec{N},\overrightarrow{AP}\right)\cdot\left|\overrightarrow{AI}\right|;\qquad(12)$$

$$f_2(u,v)=\left(\vec{N},\vec{N}_l\right).\qquad(13)$$

Продифференцируем уравнение (12) и (13) по параметрам u и v

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \left\{ \left(\frac{\partial \vec{N}}{\partial u}, \overrightarrow{AP} \right) - \left(\vec{N}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right) \right\} \cdot \left| \overrightarrow{AI} \right| - \left(\vec{N}, \overrightarrow{AP} \right) \cdot \frac{\left(\overrightarrow{AI}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right)}{\left| \overrightarrow{AI} \right|} -$$
$$- \left\{ \left(\frac{\partial \vec{N}}{\partial u}, \overrightarrow{AI} \right) - \left(\vec{N}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right) \right\} \cdot \left| \overrightarrow{AP} \right| + \left(\vec{N}, \overrightarrow{AI} \right) \cdot \frac{\left(\overrightarrow{AP}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right)}{\left| \overrightarrow{AP} \right|}; \quad (14)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} = \left\{ \left(\frac{\partial \vec{N}}{\partial v}, \overrightarrow{AP} \right) - \left(\vec{N}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \right\} \cdot \left| \overrightarrow{AI} \right| - \left(\vec{N}, \overrightarrow{AP} \right) \cdot \frac{\left(\overrightarrow{AI}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)}{\left| \overrightarrow{AI} \right|} -$$
$$- \left\{ \left(\frac{\partial \vec{N}}{\partial v}, \overrightarrow{AI} \right) - \left(\vec{N}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \right\} \cdot \left| \overrightarrow{AP} \right| + \left(\vec{N}, \overrightarrow{AI} \right) \cdot \frac{\left(\overrightarrow{AP}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)}{\left| \overrightarrow{AP} \right|}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = \left(\frac{\partial \vec{N}}{\partial u}, \vec{N}_l \right) + \left(\vec{N}, \frac{\partial \vec{N}_l}{\partial u} \right); \quad (16)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial v} = \left(\frac{\partial \vec{N}}{\partial v}, \vec{N}_l \right) + \left(\vec{N}, \frac{\partial \vec{N}_l}{\partial v} \right), \quad (17)$$

где

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial u} = \left[\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] + \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v} \right];$$

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial v} = \left[\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] + \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2} \right];$$

$$\frac{\partial \vec{N}_l}{\partial u} = \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AI} \right];$$

$$\frac{\partial \vec{N}_l}{\partial v} = \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AI} \right].$$

Пусть u_i и v_i некоторое приближение искомых параметров, тогда для определения следующего приближения находим приращения параметров Δu_i и Δv_i, решая следующую систему линейных уравнений, например методом Гаусса [3],

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1(u_i, v_i)}{\partial u} \Delta u_i + \frac{\partial f_1(u_i, v_i)}{\partial v} \Delta v_i = -f_1(u_i, v_i); \\ \frac{\partial f_2(u_i, v_i)}{\partial u} \Delta u_i + \frac{\partial f_2(u_i, v_i)}{\partial v} \Delta v_i = -f_2(u_i, v_i). \end{cases} \quad (18)$$

Следующее приближение параметров равно

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_{i+1}; v_{i+1} = v_i + \Delta v_{i+1}. \quad (19)$$

Данный процесс продолжается до тех пор, пока максимальное абсолютное значение приращение параметров больше некоторой величины $\varepsilon > 0$.

Приведенный выше алгоритм реализован в среде *ObjectARX* для *AutoCAD* [5]. Отражающие поверхности аппроксимировались методом Фергюсона (4). Примеры вычислений приведены на рис.2.

Рассмотренный алгоритм может быть использован в качестве модуля автоматизированных систем для расчета первых отражений в задачах геометрической оптики, геометрической акустики и др., в тех случаях, когда волновыми свойствами излучения можно пренебречь.

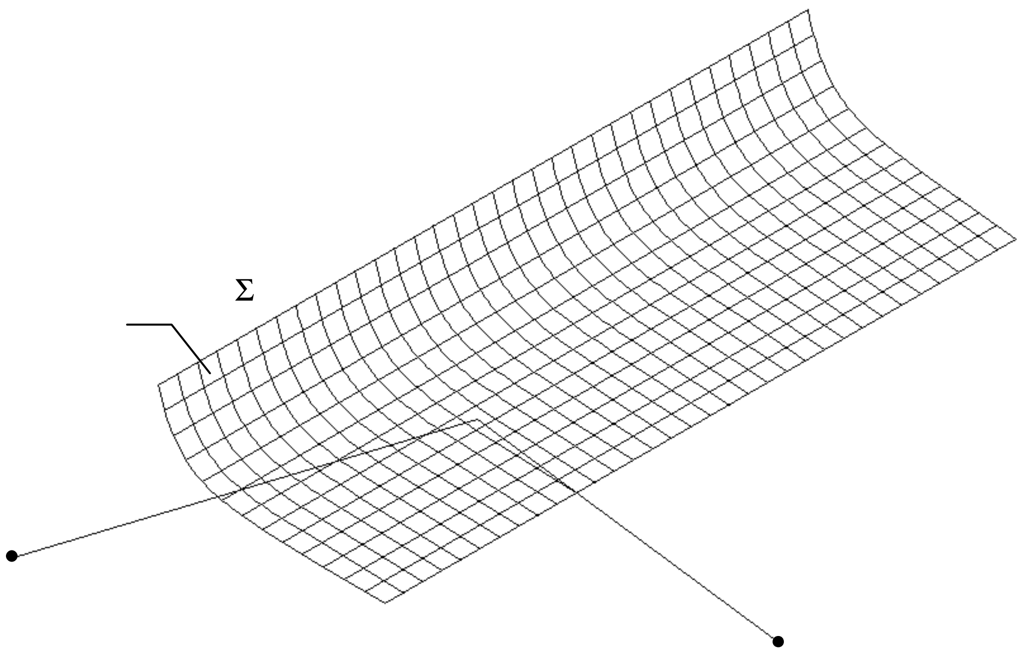

Рис. 2. *Пример расчета*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландсберг Г.С. Оптика / Г.С. Ландсберг. – Москва: Наука, 2003. – 848 с.
2. Волков Е.А. Численные методы / Е.А. Волков. – Москва: Наука, 1987. – 247 с.
3. Александров П.С. Лекции по аналитическая геометрии / П.С. Флександров. – Москва: Наука, 1968. – 912 с.
4. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – Москва: Мир, 2001. – 604 с.
5. Полищук Н.Н. AutoCAD: разработка приложений, настройка и адаптация / Н.Н. Полищук. – Санкт-Петербург: БХВ – Петербург, 2006. – 992 с.