Замятин Александр Витальевич
Zamyatin Alexander
Доцент кафедры «Начертательной геометрии и черчение».
Associate professor of the chair of “Descriptive geometry and sketching”.
E-Mail: alex080262@mail.ru

Кубарев Александр Евгеньевич
Kubarev Alexander
Заведующий кафедрой «Начертательной геометрии и черчение».
Head of the chair of “Descriptive geometry and sketching”.
E-Mail: kubarev_a@mail.ru

Замятина Екатерина Александровна
Zamyatina Ekaterina
Ростовский государственный строительный университет.
Rostov State Building University.
Ассистент кафедры «Начертательной геометрии и черчение».
Assistant of the chair of “Descriptive geometry and sketching”.
E-Mail: kng@rgsu.donpac.ru

Алгоритм сплайн-аппроксимации нелинейчатой поверхности

Algorithm of spline-approximation not a linear surface

Аннотация: В статье описан алгоритм аппроксимации отсека нелинейчатой поверхности сплайнами. Особенностью данного алгоритма является то, что аппроксимация выполняется для всего заданного отсека. Алгоритм реализован по технологии ObjectARX для AutoCAD. Это дает возможность использовать широкий набор встроенных в AutoCAD функции работы со сплайнами. Такая технология значительно облегчает и ускоряет разработку алгоритмов и ускоряет работу программ, их освоение пользователем. Разработанные алгоритмы могут быть использованы в различных технических задачах, где используются нелинейчатые поверхности не имеющие аналитического описания.

The Abstract: In article the algorithm of approximation of a compartment not a linear surfaces is described by splines. Feature of the given algorithm is that approximation is carried out for all set compartment. The algorithm is realised on technology ObjectARX for AutoCAD. It gives the chance to use a wide set built in in AutoCAD functions of work with splines. Such technology considerably facilitates and accelerates working out of algorithms and accelerates work of programs, their development by the user. The developed algorithms can be used in various technical problems where are used нелинейчатые surfaces not having the analytical description.

Ключевые слова: Нелинейчатая оверхность, сплайн, сеть, первая производная, вторая производная.

Keywords: Not linear surface, spline, surface, first derivative, second derivative.

В статье рассмотрен алгоритм аппроксимации поверхности сплайнами. Сплайны являются мощным инструментом геометрического моделирования [1], поэтому функции работы со сплайнами имеют многие современные графические системы. Рассматриваемый алгоритм производит аппроксимацию всего отсека заданной поверхности. Хотя такая аппроксимация занимает больше времени, чем аппроксимация небольшого отсека, в некоторых задачах, за счет того, что заданный отсек поверхности рассматривается как единое целое, данный алгоритм оказывается более эффективным.

Алгоритм разработан в среде *ObjectARX* для *AutoCAD* [2, 3] на языке *Visual C*++ [4].

Пусть поверхность задана линейным каркасом в виде набора сплайнов k_i. На каждом из заданных сплайнов k_i возьмем равное количество точек, которые обозначим M_{ij}. Точки на сплайне можно взять на одинаковых расстояниях. Через найденные точки проведем второе семейство сплайнов – l_j. Получим поверхность заданную сетью (рис.1). Сплайны k_i и l_j расположены на отдельных уровнях. В каждой точке любого из сплайнов имеется возможность определить первую и вторую производные по его уникальному параметру. Будем считать, что поверхность, в пределах рассматриваемого отсека не имеет особых точек.

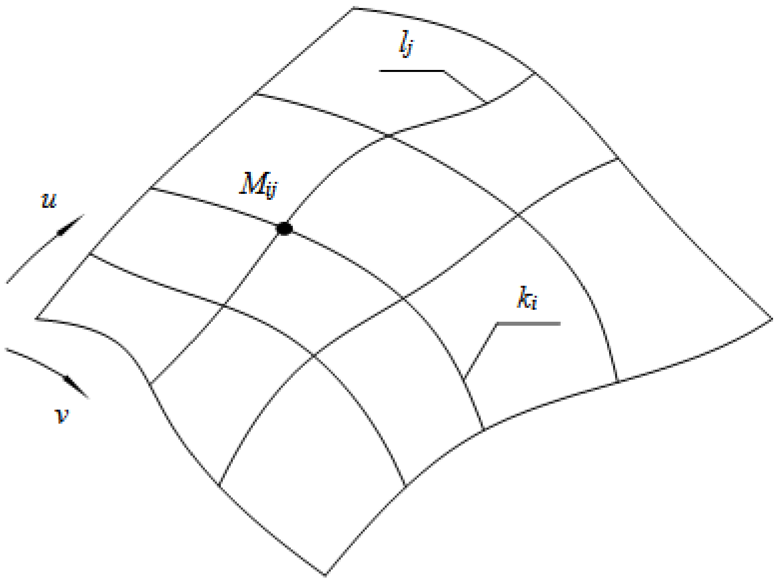

Рис. 1. *Заданная поверхность*

Задача состоит в том, что каждой точке заданного отсека поверхности поставить в соответствие два вещественных параметра *u* и *v*, т.е. определить $\vec{r}(u,v)$, и найти в ней первые производные $\dfrac{\partial\vec{r}(u,v)}{\partial u}$, $\dfrac{\partial\vec{r}(u,v)}{\partial v}$ и вторые производные $\dfrac{\partial^2\vec{r}(u,v)}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2\vec{r}(u,v)}{\partial v^2}$, $\dfrac{\partial^2\vec{r}(u,v)}{\partial u\partial v}$.

Возьмем в пространстве некоторую линию *m*. Рассмотрим вопросы определения, первых и вторых производных в ней, при переходе к новому параметру. Пусть задана линия:

$$\vec{r} = \vec{r}(s). \tag{1}$$

Параметр *s* монотонно возрастает и находится в пределах $s \in \left[0; s^{кон}\right]$. На рассматриваемом отрезке линия (1) непрерывна и в каждой точке имеет непрерывные первую вторую производные.

На линии, с некоторой плотностью, заданы точки M_i (рис. 2). Каждой из точек M_i соответствует параметр s_i

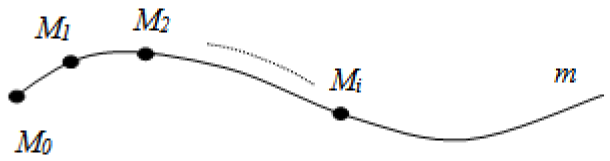

Рис. 2. *Переход к новому параметру на линии*

Перейдем к новому параметру *u*, где $u \in \left[0, u^{кон}\right]$. Будем считать, что параметрам точек M_i – s_i соответствуют новые параметры u_i. Пусть *u*, как и *s*, монотонно возрастает. Запишем зависимость параметра *s* от *u* в следующем виде:

$$s = f(u), \tag{2}$$

Тогда, учитывая (1) и (2), уравнение линии имеет вид:

$$\vec{r} = \vec{r}(f(u)). \tag{3}$$

Определим зависимость (2). Выполним аппроксимацию функции (2) плоским сплайном, который обозначим через *n* (рис.3). Имея такую зависимость можно определить параметр точки на линии – s^T при заданном параметре u^T (рис.3) и из уравнения (3) найти координаты точки.

Найдем первую и вторую производные по новому параметру *u*. Продифференцировав (3) по параметру *u*, получим:

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{d\vec{r}(f(u))}{ds} \cdot \frac{df(u)}{du}. \tag{4}$$

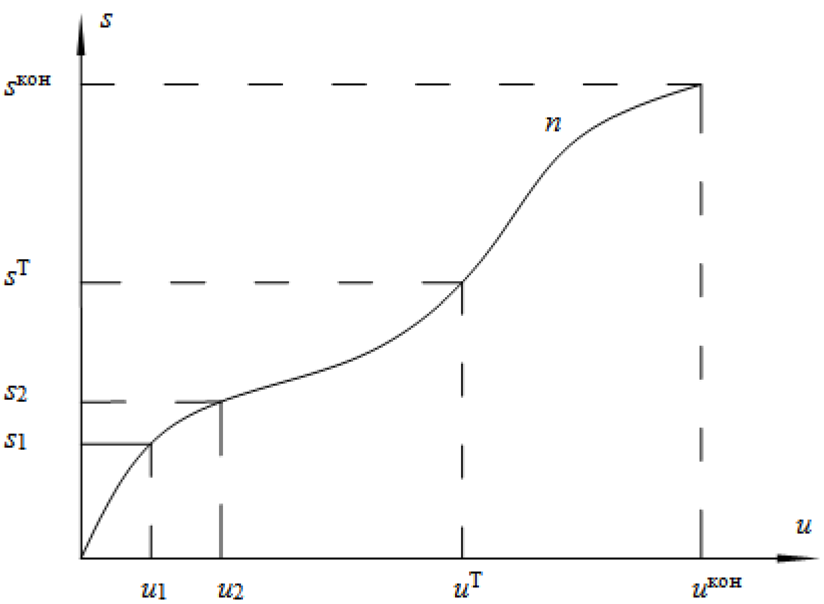

Рис. 3. *Зависимость s=f(u)*

Положение точки на сплайне *n* (рис.3) зависит от параметра σ, поэтому:

$$\frac{df}{du} = \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\frac{du}{d\sigma}}. \tag{5}$$

Подставив (5) в (4), для первых производных получим:

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \left(\frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\frac{du}{d\sigma}} \right). \tag{6}$$

Для определения вторых производных продифференцируем (5) по *u*:

$$\frac{d^2\vec{r}}{du^2} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \cdot \left(\frac{df}{du} \right)^2 + \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d^2 f}{du^2} \tag{7}$$

Найдем вторую производную функции f по параметру *u*:

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \frac{\frac{du}{d\sigma} \cdot \frac{d^2 f}{d\sigma^2} - \frac{d^2 u}{d\sigma^2} \cdot \frac{df}{d\sigma}}{\left(\frac{du}{d\sigma} \right)^2}. \tag{8}$$

Подставив (5) и (8) в (7) получим значение искомой второй производной.

Вдоль каждого из сплайнов k_i параметр $u = const$, вдоль сплайнов l_j – $v = const$. Кроме этого, положение точки на каждом из сплайнов k_i определяется уникальным параметром s_i, который изменяется в пределах $s_i \in \left[0; s_i^{кон}\right]$, на сплайнах l_j, положение точки определяется уникальным параметром t_j, который изменяется в пределах $t_j \in \left[0; t_j^{кон}\right]$:

$$t_i = f_i(v). \tag{9}$$

Из всех заданных сплайнов k_i найдем сплайн, имеющий наибольшее значение конечного параметра $s_i^{кон} = s^{\max}$. Выполнив аналогичную операцию для сплайнов l_j, найдем $t^{\max}$. Для повышения точности вычисления положим, что параметры отсека поверхности *u* и *v* изменяются в пределах $u \in \left[0; s^{\max}\right]$, $v \in \left[0; t^{\max}\right]$. Пусть максимальные конечные параметры имеют сплайны k_m и l_n. Все точки сплайнов k_i, проходящие через M_{in}, имеют одинаковые параметры v_i, будем считать $v_i = t_i^n$. Все точки сплайнов l_j, проходящие через M_{mj}, имеют одинаковые параметры u_j, равные $u_j = s_j^m$. Выполним аппроксимацию функции (2) для k_i плоскими сплайнами f_i,проходящими через точки, абсциссы которых равны t_i^n, ординаты равны значениям параметров t_i^j. Аналогично, аппроксимируем функцию (2) для l_j. Абсциссы точек, через которые проходят сплайны, определяющие зависимость (2), равны s_j^m, ординаты равны s_j^i.

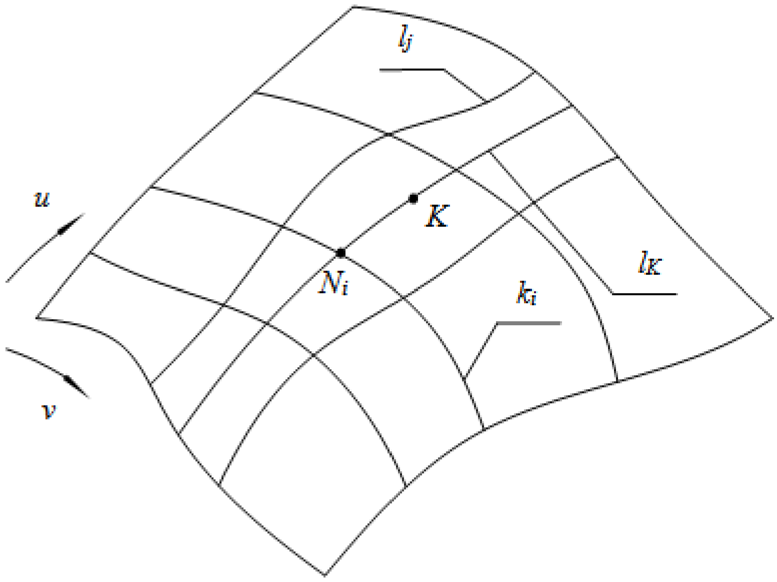

Рис. 4. *Построение сплайна* l_K

Пусть заданы параметры некоторой точки поверхности K – u_k и v_k. Найдем координаты этой точки $\vec{r}=\vec{r}(u_k,v_k)$, первые производные в ней $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\frac{\partial\vec{r}(u_k,v_k)}{\partial u}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\frac{\partial\vec{r}(u_k,v_k)}{\partial v}$ и вторые производные $\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^2}=\frac{\partial^2\vec{r}(u_k,v_k)}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial v^2}=\frac{\partial^2\vec{r}(u_k,v_k)}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2\vec{r}(u_k,v_k)}{\partial u\partial v}$. Определим на каждом сплайне k_i точку N_i, соответствующую параметру $v=v_k$ (3). В каждой точке N_i определим первые производные $\frac{d\vec{r}_i^{\,k}(f_i(v_k))}{dv}$ (6) и вторые производные $\frac{d^2\vec{r}_i^{\,k}(f_i(v_k))}{dv^2}$ (7). Через найденные точки построим сплайн l_k (рис. 4). Точка *K* будет принадлежать этому сплайну. Построим для сплайна l_k зависимость параметра s_k от *u* (2), рис.3. По формуле (3) определим координаты точки *K*. Частная производная поверхности в точке *K* по параметру *u*, равна:

$$\frac{\partial\vec{r}(u_k,v_k)}{\partial u}=\frac{d\vec{r}_k^{\,l}(f_k^{\,l}(u_k))}{du}, \tag{10}$$

где производная стоящая в правой части равенства, вычисляется по формуле (6).

Вторая частная производная по параметру *u* в этой точке:

$$\frac{\partial^2\vec{r}(u_k,v_k)}{\partial u^2}=\frac{d^2\vec{r}_k^{\,l}(f_k^{\,l}(u_k))}{du^2} \tag{11}$$

где вторая производная, находящаяся справа, вычисляется по формуле (7), $f_k^{\,l}(u)$ – зависимость (2) для сплайна l_k.

Для вычисления $\frac{\partial\vec{r}(u_k,v_k)}{\partial v}$ строим сплайн по точкам $\frac{d\vec{r}_i^{\,k}(f_i^{\,k}(v_k))}{dv}$. Определяем зависимость параметра сплайна от *u* и по формуле, аналогичной (3), находим искомую производную при значении параметра $u = uk$. Производная в точке *K* этого сплайна, вычисления по формуле, аналогичной (6),равна смешанной производной $\frac{\partial^2 \vec{r}(u_k, v_k)}{\partial u \partial v}$.

Чтобы вычислить $\frac{\partial^2 \vec{r}(u_k, v_k)}{\partial^2 v}$ строим сплайн по точкам $\frac{d^2 r_i^k\left(f_i^k(v_k)\right)}{dv^2}$, определяем зависимость параметра сплайна от *u* и по формуле, аналогичной (3), находим искомую вторую производную.

Аналогично можно выполнить аппроксимацию, используя сплайны l_j.

Для хранения динамических данных в памяти компьютера используются односвязные списки шаблонов (тип *ListNode<TYPE>*) [6].

Для выполнения аппроксимации, описанным выше способом, создан класс *CPovS*. Рассмотрим объекты данного класса.

К защищенным переменным класса (*protected*) относятся следующие переменные:

- *hu* – указатель на начальный элемент списка, содержащего указатели на сплайны заданной поверхности k_i, тип переменной – указатель на *ListNode <AcDbSpline>*;
- *hv* – указатель на начальный элемент списка, содержащего указатели на сплайны l_j, тип, такой же, как и у *hu*;
- *hptsu* – указатель на начальный элемент списка, содержащего массивы точек сплайнов k_i, тип переменной – указатель на *ListNode <AcGePointArray>*;
- *hptsv* – указатель на начальный элемент списка, содержащего массивы точек сплайнов l_j, тип такой же, что и для *hptsu*;
- *psu* – содержатся параметры точек M_{nj} на сплайне k_n, который имеет максимальный конечный параметр из сплайнов k_i (тип *AcGeDoubleArray*);
- *psv* – того же типа, что и предыдущий массив, хранятся параметры точек M_{im}, лежащих на сплайне l_m, имеющего максимальный параметр из сплайнов l_j;
- *hpu* – хранит указатель на первый элемент списка сплайнов, определяющих функции $f_i(t)$ (тип *ListNode<AcDbSpline>**);
- *hpv* – того же типа, что и *hpu*, содержит указатель на первый элемент списка сплайнов, определяющих функции $s_j(u)$.

Функция *ParPov* является основной функцией алгоритма. В качестве входных данных она использует значения параметров *u* и *v* (тип *Double*); *ppt* – указатель на точку (тип *AcGePoint3d**), используется для передачи точки поверхности; *pru*, *prv*, *pruu*, *prvv*, *pruv* – указатели на векторы (*AcGeVector3d**), используются для передачи значений первой и вторых производных в точке поверхности. Функция возвращает значение “*true*”, если вычисление прошло успешно, иначе значение функции “*false*”.

Предложенный алгоритм может быть использован в качестве модуля различных прикладных программ, решающих задачи с поверхностями не имеющими аналитического описания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – М.: Мир, 2001. – 604 с.

2. Фокс, А. Вычислительная геометрия / А. Фокс, М. Пратт. –М.: Мир, 1982. – 304 с

3. Полищук Н.Н. AutoCAD 2007 / Н.Н. Полищук. – СПб.: БХВ – Петербург, 2008.

4. Полищук Н.Н. AutoCAD: разработка приложений, настройка и адаптация / Н.Н. Полищук. – СПб.: БХВ – Петербург, 2006. – 992 с.

5. Секунов Н.Ю. Visual C++ Визуальная среда программирования / Н.Ю.Секунов. – СПб.: БХВ – Петербург, 1999. – 960 с.

6. Труб И.И. Объектно-ориентированное моделирование на С++ / И.И. Труб. – СПб.: Питер, 2006. – 411 с.